

*Hinweis:* In der Klausur ist die Benutzung eines Taschenrechners oder anderer technischer Hilfsmittel nicht gestattet.

1. Berechnen Sie zunächst die ersten sieben Summanden der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 und dann die komplette Taylorreihe für die Funktion  $f(x) = (1-x)^{-1}$ .

2. Fertigen Sie für die  $\pi$ -periodische Funktion

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

eine Skizze des Graphen für  $x \in [-\pi, 2\pi]$  an und entscheiden Sie anhand des Graphen, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

Berechnen Sie die Fourierreihe für diese Funktion.

$$\text{Hinweis: } \int \sin(x) \cos(ax) dx = \left[ -\frac{\cos((1+a)x)}{2(1+a)} - \frac{\cos((1-a)x)}{2(1-a)} \right]$$

(  $a \neq \pm 1$  )

3.  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{x+y}$

$$(x_0, y_0) = (1/3, 2/3).$$

a) Berechnen Sie die Tangentialebene zu  $f$  in  $(x_0, y_0)$ .

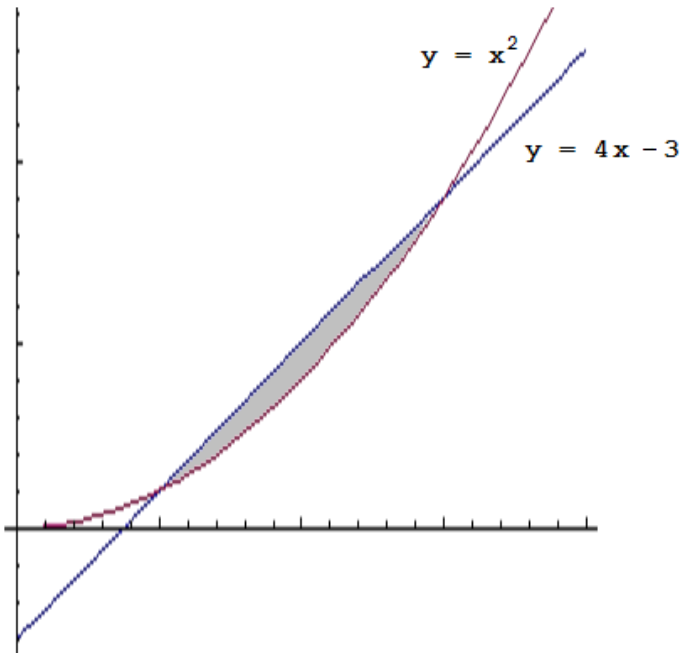
b) Berechnen Sie den Normalenvektor zu  $f$  in  $(x_0, y_0)$ .

c) Berechnen Sie für  $v = (8, -6)$  die Richtungsableitung zu  $f$  in  $(x_0, y_0)$ .

d) Bestimmen Sie alle strikten lokalen Minima/Maxima von  $f$ .

4.  $f(x,y) = x \cdot e^y$

Berechnen Sie das Integral von  $f$  über dem grau markierten Bereich zwischen den skizzierten Kurven.



Hinweise:  $\int x e^{ax+b} dx = \left[ \frac{1}{a^2} (ax - 1) e^{ax+b} \right]$

$$\int x e^{x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]$$

5.  $K$  sei ein Körper mit den Zylinderkoordinaten

$$z \in [0,1], \varphi \in [\pi/2, \pi], r \in [1, e^z].$$

Skizzieren Sie die Querschnitte des Körpers in der  $(x,z)$ -Ebene ( $y = 0$ , also „Seitenansicht“) und für  $z = 1$  („Draufsicht“).

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinate  $z_s$  von  $K$  für die

Dichte  $m(x,y,z) = -x \cdot y$ .

Hinweis:  $\int \sin x \cos x dx = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 x \right];$

siehe auch Hinweise unter 4.

6. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel (homogene Massenbelegung) um  $(0,0,0)$  mit Radius 2 und  $z \geq 0$ .

*Tipp: Innere Integration nach  $\varphi$ .*

*siehe auch Hinweis unter 5.*

## Lösungen

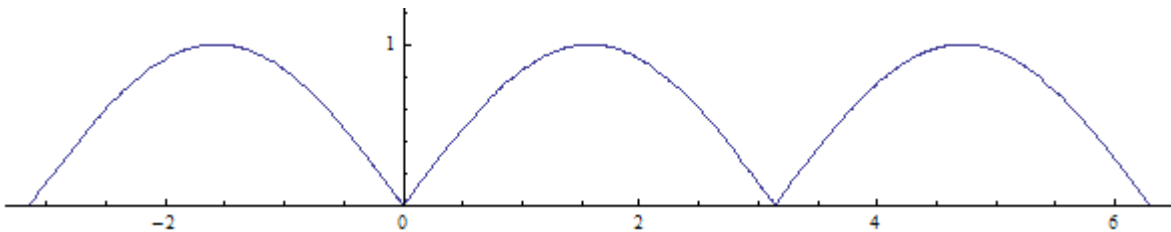
$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x) &= (1-x)^{-1} \\
 f'(x) &= (1-x)^{-2} \\
 f''(x) &= 2(1-x)^{-3} \\
 f'''(x) &= 6(1-x)^{-4} \\
 f^{(4)}(x) &= 24(1-x)^{-5} \\
 f^{(5)}(x) &= 120(1-x)^{-6} \\
 f^{(6)}(x) &= 720(1-x)^{-7}
 \end{aligned}$$

$$f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

2.



$f$  ist eine gerade Funktion.

$$\omega = 2$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(2kx) \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos((1+2k)x)}{2(1+2k)} - \frac{\cos((1-2k)x)}{2(1-2k)} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1-4k^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$$

$$3.a) f_x(x,y) = (x \cdot y + y) \cdot e^{x+y} \Rightarrow f_x(1/3, 2/3) = \frac{8}{9} e$$

$$f_y(x,y) = (x \cdot y + x) \cdot e^{x+y} \Rightarrow f_y(1/3, 2/3) = \frac{5}{9} e$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x,y) &= \frac{8}{9} e \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{9} e \left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{9} e \\ &= \frac{8}{9} e x + \frac{5}{9} e y - \frac{4}{9} e \end{aligned}$$

$$b) \text{ Normalenvektor : } \left(\frac{8}{9} e, \frac{5}{9} e, -1\right)$$

$$c) \text{ Normierung von } v : ||v|| = 10$$

$$f'_v(1/3, 2/3) = \frac{8}{9} e \frac{8}{10} + \frac{5}{9} e \frac{-6}{10} = \frac{17}{45} e$$

$$d) f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -1$$

$$f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = -1$$

Zu untersuchen sind also die Punkte  $(0,0)$  und  $(-1,-1)$ .

$$f_{xx}(x,y) = (x \cdot y + 2y) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{yy}(x,y) = (x \cdot y + 2x) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy}(x,y) = (x \cdot y + y + x + 1) \cdot e^{x+y}$$

$$\Rightarrow E(0,0) = -1 \Rightarrow \text{kein Extremum}$$

$$E(-1,-1) = (-e^{-2})^2 - 0^2 > 0 \Rightarrow \text{Maximum in } (-1,-1)$$

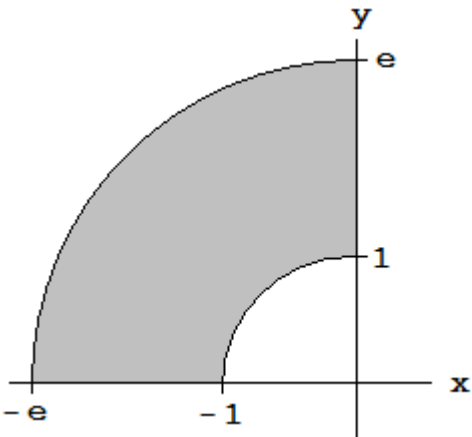
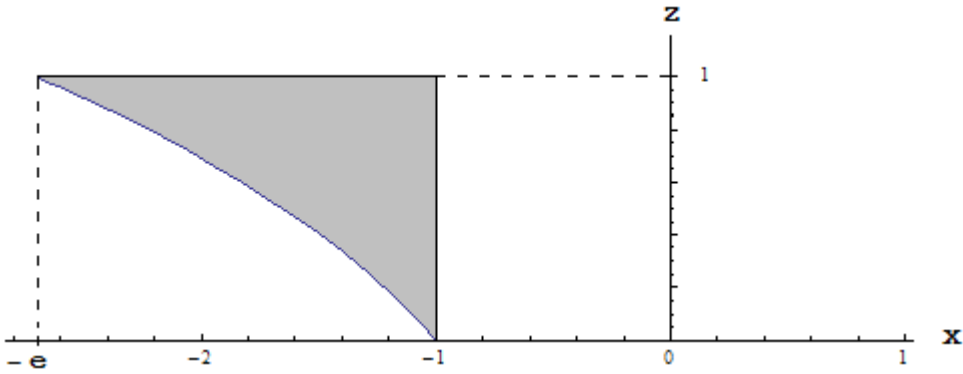
4. Schnittstellen der Kurven :  $x = 1$  und  $x = 3$ .

$$\int_1^3 \int_{x^2}^{4x-3} x e^y dy dx = \int_1^3 \left[ x e^y \right]_{y=x^2}^{y=4x-3} dx = \int_1^3 \left( x e^{4x-3} - x e^{x^2} \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{1}{16} (4x - 1) e^{4x-3} - \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_1^3 = \frac{11}{16} e^9 - \frac{1}{2} e^9 - \frac{3}{16} e + \frac{1}{2} e =$$

$$= \frac{3}{16} e^9 + \frac{5}{16} e$$

5.



$$M = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \int_1^{e^z} (-r^3 \cos \varphi \sin \varphi) dr dz d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \frac{1 - e^{4z}}{4} \cos \varphi \sin \varphi dz d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{4} \left[ z - \frac{e^{4z}}{4} \right]_0^1 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{16} (5 - e^4) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{e^4 - 5}{32}$$

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{M} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \int_1^{e^z} (-z r^3 \cos \varphi \sin \varphi) dr dz d\varphi = \\
&= \frac{1}{M} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \frac{z - z e^{4z}}{4} \cos \varphi \sin \varphi dz d\varphi = \\
&= \frac{1}{M} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{4} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{(4z - 1)e^{4z}}{16} \right]_0^1 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{M} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{16} e^4 - \frac{1}{16} \right) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{M} \cdot \frac{3 e^4 - 7}{128} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 e^4 - 7}{e^4 - 5}
\end{aligned}$$

6.  $V = \frac{16}{3} \pi$  nach Vorlesung 3.5.a)

$$x_s = \frac{1}{V} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^3 \cos \varphi \cos^2 \delta d\varphi d\delta dr = 0$$

$$y_s = \frac{1}{V} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^3 \sin \varphi \cos^2 \delta d\varphi d\delta dr = 0$$

$$z_s = \frac{1}{V} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^3 \sin \delta \cos \delta d\varphi d\delta dr = \frac{3}{4}$$