Probeklausur zur 1. Klausur Transformationen 1 StudiumPlus Ing./MST M

Prof. Dr. M. Börgens, FH Gießen-Friedberg

Hinweis: In der Klausur ist die Benutzung eines Taschenrechners oder anderer technischer Hilfsmittel nicht gestattet.

1. Berechnen Sie zunächst die ersten sieben Summanden der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 und dann die komplette Taylorreihe für die Funktion $f(x) = (1-x)^{-1}$.

2. Fertigen Sie für die π-periodische Funktion

   $f(x) = \sin x\ , \quad x \in [0, \pi]$

   eine Skizze des Graphen für $x \in [-\pi, 2\pi]$ an und entscheiden Sie anhand des Graphen, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

   Berechnen Sie die Fourierreihe für diese Funktion.

Hinweis: $\int \sin(x)\cos(ax)\,dx = \left[-\frac{\cos((1+a)x)}{2(1+a)} - \frac{\cos((1-a)x)}{2(1-a)} \right]$

$(a \neq \pm 1)$

3. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{x+y}$

   $(x_0,y_0) = (1/3,\ 2/3)$.

a) Berechnen Sie die Tangentialebene zu f in (x_0,y_0).

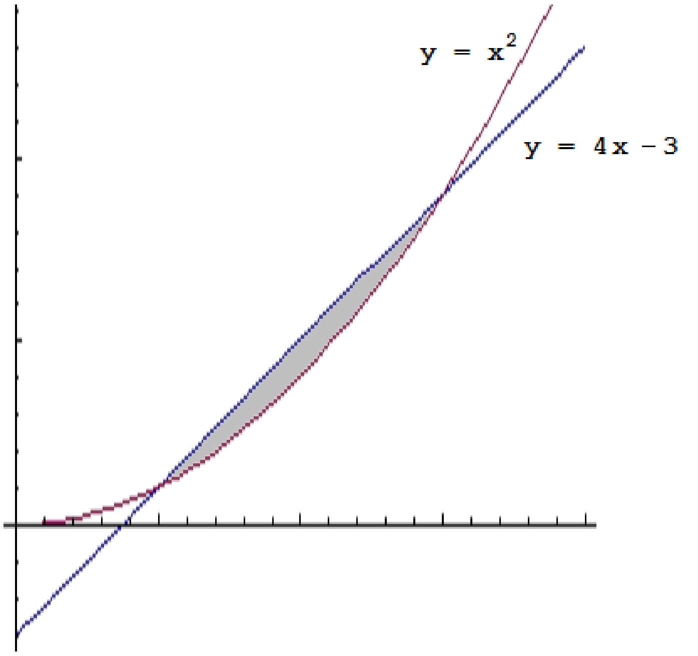
b) Berechnen Sie den Normalenvektor zu f in (x_0,y_0).

c) Berechnen Sie für $v = (8,-6)$ die Richtungsableitung zu f in (x_0,y_0).

d) Bestimmen Sie alle strikten lokalen Minima/Maxima von f .

4. $f(x,y) = x \cdot e^y$

Berechnen Sie das Integral von f über dem grau markierten Bereich zwischen den skizzierten Kurven.



Hinweise: $\int x\, e^{ax+b}\, dx = \left[\frac{1}{a^2}(ax-1)\, e^{ax+b} \right]$

$\int x\, e^{x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\, e^{x^2} \right]$

5. K sei ein Körper mit den Zylinderkoordinaten

$z \in [0,1]$, $\varphi \in [\pi/2,\pi]$, $r \in [1,e^z]$.

Skizzieren Sie die Querschnitte des Körpers in der (x,z)-Ebene ($y = 0$, also „Seitenansicht“) und für $z = 1$ („Draufsicht“).

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinate z_S von K für die Dichte $m(x,y,z) = -x \cdot y$.

Hinweis: $\int \sin x \cos x\, dx = \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]$;

siehe auch Hinweise unter 4.

6. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel (homogene Massenbelegung) um $(0,0,0)$ mit Radius 2 und $z \geq 0$.

Tipp: Innere Integration nach φ .

siehe auch Hinweis unter 5.

Lösungen

1. $f(x) = (1-x)^{-1}$

$f'(x) = (1-x)^{-2}$

$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$

$f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5}$

$f^{(5)}(x) = 120(1-x)^{-6}$

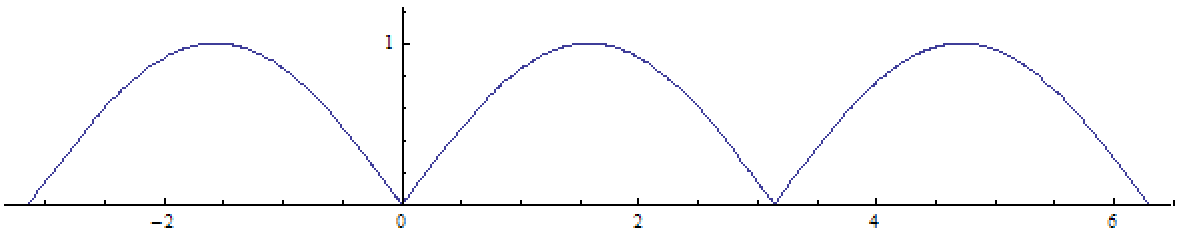
$f^{(6)}(x) = 720(1-x)^{-7}$

$f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k!$

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

2.



f ist eine gerade Funktion.

$\omega = 2$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(2kx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos((1+2k)x)}{2(1+2k)} - \frac{\cos((1-2k)x)}{2(1-2k)} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1-4k^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$$

3.a) $f_x(x,y) = (x \cdot y + y) \cdot e^{x+y} \quad \Rightarrow \quad f_x(1/3, 2/3) = \frac{8}{9} e$

$f_y(x,y) = (x \cdot y + x) \cdot e^{x+y} \quad \Rightarrow \quad f_y(1/3, 2/3) = \frac{5}{9} e$

$$\Rightarrow \quad h(x,y) = \frac{8}{9} e \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{9} e \left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{9} e$$

$$= \frac{8}{9} e\, x + \frac{5}{9} e\, y - \frac{4}{9} e$$

b) Normalenvektor : $\left(\frac{8}{9} e, \frac{5}{9} e, -1\right)$

c) Normierung von v : $||v|| = 10$

$$f'_v(1/3, 2/3) = \frac{8}{9} e \, \frac{8}{10} + \frac{5}{9} e \, \frac{-6}{10} = \frac{17}{45} e$$

d) $f_x(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad x = -1$

$f_y(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = -1$

Zu untersuchen sind also die Punkte $(0,0)$ und $(-1,-1)$.

$f_{xx}(x,y) = (x \cdot y + 2y) \cdot e^{x+y}$

$f_{yy}(x,y) = (x \cdot y + 2x) \cdot e^{x+y}$

$f_{xy}(x,y) = (x \cdot y + y + x + 1) \cdot e^{x+y}$

$\Rightarrow \quad E(0,0) = -1 \quad \Rightarrow \quad$ kein Extremum

$E(-1,-1) = (-e^{-2})^2 - 0^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum in $(-1,-1)$

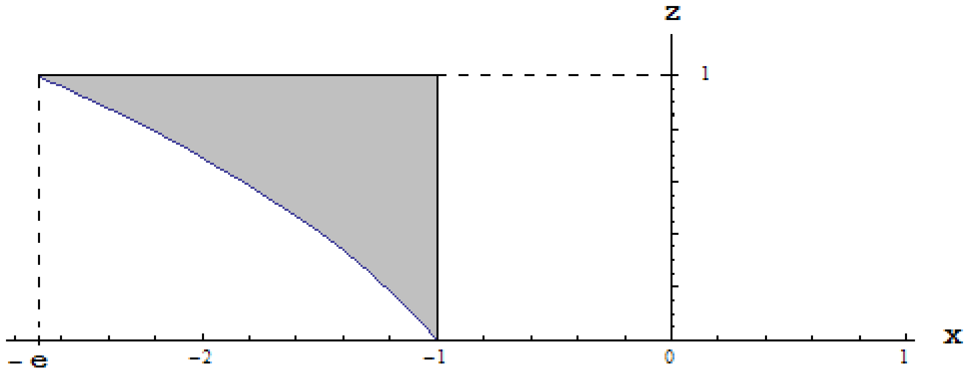
4. Schnittstellen der Kurven : $x = 1$ und $x = 3$.

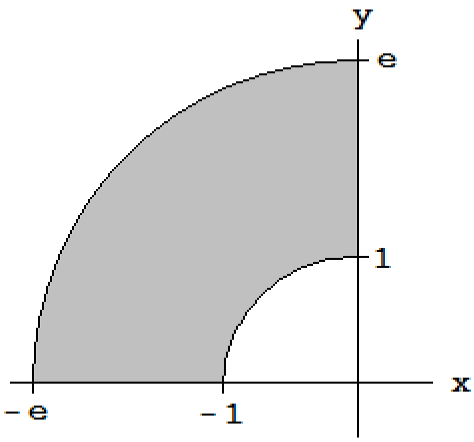
$$\int_1^3 \int_{x^2}^{4x-3} x\, e^y \, dy\, dx = \int_1^3 \left[x\, e^y \right]_{y=x^2}^{y=4x-3} dx = \int_1^3 \left(x\, e^{4x-3} - x\, e^{x^2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{16}(4x-1)e^{4x-3} - \frac{1}{2}e^{x^2} \right]_1^3 = \frac{11}{16}e^9 - \frac{1}{2}e^9 - \frac{3}{16}e + \frac{1}{2}e =$$

$$= \frac{3}{16}e^9 + \frac{5}{16}e$$

5.





$$M = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \int_1^{e^z} \left(-r^3 \cos\varphi \ \sin\varphi \right) dr\, dz\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \frac{1-e^{4z}}{4} \cos\varphi \sin\varphi \, dz\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{4}\left[z - \frac{e^{4z}}{4} \right]_0^1 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{16}\left(5 - e^4\right) \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{e^4 - 5}{32}$$

$$z_S = \frac{1}{M}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1\int_1^{e^z}\left(-z\,r^3\cos\varphi\;\sin\varphi\right)dr\,dz\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{M}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1 \frac{z - z\,e^{4z}}{4}\cos\varphi\sin\varphi\,dz\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{M}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2} - \frac{(4z-1)e^{4z}}{16}\right]_0^1\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{M}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^4 - \frac{1}{16}\right)\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{3\,e^4 - 7}{128} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3\,e^4 - 7}{e^4 - 5}$$

6. $V = \frac{16}{3}\pi$ nach Vorlesung 3.5.a)

$$x_s = \frac{1}{V}\int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3\cos\varphi\;\cos^2\delta\,d\varphi\,d\delta\,dr = 0$$

$$y_s = \frac{1}{V}\int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3\sin\varphi\;\cos^2\delta\,d\varphi\,d\delta\,dr = 0$$

$$z_s = \frac{1}{V}\int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3\sin\delta\cos\delta\,d\varphi\,d\delta\,dr = \frac{3}{4}$$