

**Vademecum  
zur Vorlesung**

**Transformationen 1**

Ingenieurwesen /  
Mikrosystemtechnik  
StudiumPlus

**Professor Dr. Manfred Börgens**

**Fachhochschule Gießen-Friedberg  
Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und  
Datenverarbeitung**

Inhalt :

Übungen

Begleitmaterialien

**Ü 1.1.**

Berechnen Sie die Taylorreihe für die Funktion **cosh** mit Entwicklungspunkt 0. Auf welchem Intervall ist das Taylorpolynom 4. Grades (abbrechende Taylorreihe mit 5 Summanden) eine gute Näherung?

**Ü 1.2.**

Berechnen Sie die Fourierreihe für die 2-periodische Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ -1 & x \in [1, 2) \end{cases},$$

indem Sie das Ergebnis von Bsp. 1.2.a) geeignet umformen.

**Ü 1.3.**

Berechnen Sie die Fourierreihe der 4-periodischen „Sägezahnfunktion“

$$f(x) = x \text{ für } x \in (-2, 2].$$

**Ü 2.1.**

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer Ebene (siehe 2.1.a)) durch die Punkte  $(2,0,2)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,0)$ .

**Ü 2.2.**

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 24$$

Bestimmen Sie für  $f$

- lokale Extrema
- die Tangentialebene für  $(x_0, y_0) = (0, 2)$
- die Richtungsableitung für  $(x_0, y_0) = (0, 2)$  und  $v = (-3, 4)$
- den Normalenvektor für  $(x_0, y_0) = (-2, 6)$ .

**Ü 2.3.**

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = e^x (2x + y^2)$$

Bestimmen Sie für  $f$

- Nullstellen
- lokale Extrema
- die Tangentialebene und den Normalenvektor für  $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- die Richtungsableitung für  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  und  $v = (-2, 0)$

**Ü 3.1.**

$$f: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = 3 - x^2 - 2y^2$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt aller Querschnittflächen zwischen graph  $f$  und der  $(x, y)$ -Ebene in  $x$ - und in  $y$ -Richtung. Machen Sie Skizzen dieser Flächen.

Berechnen Sie das Volumen zwischen graph  $f$  und der  $(x, y)$ -Ebene.

**Ü 3.2.**

$A$  sei das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 0)$ .

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = e^{2x-y}.$$

Berechnen Sie das Volumen zwischen graph  $f$  und der  $(x, y)$ -Ebene.

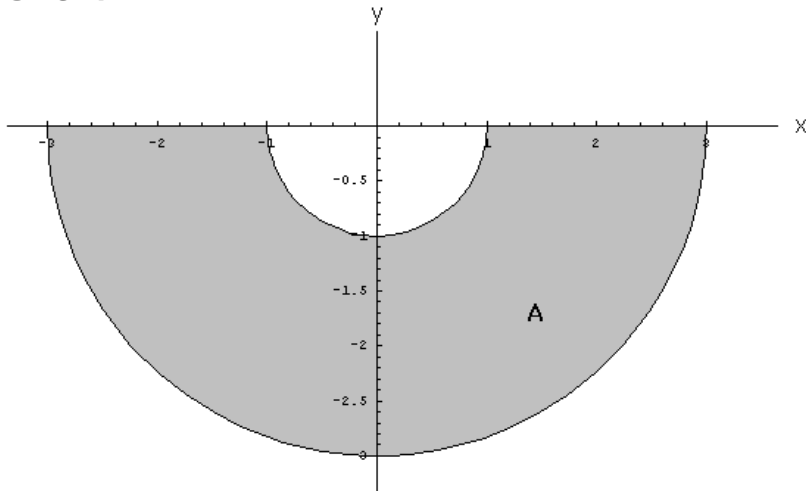
**Ü 3.3.**

$$A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in [1, +\infty], x \in [-1/y, 1/y] \}$$

$$f(x, y) = |x|$$

Skizzieren Sie graph  $f$ .

Berechnen Sie  $\iint_A f(x, y) \, dA$ .

**Ü 3.4.**

Berechnen Sie  $\iint_A (x+y)^2 dA$

**Ü 3.5.**

Skizzieren Sie den Querschnitt des Rotationskörpers  $K$  mit den Zylinderkoordinaten  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, 1]$ ,  $r \in [0, e^{-z}]$ .

Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

**Ü 3.6.**

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Zylinders mit  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, h]$ ,  $r \in [0, 2]$  und der Massenbelegung  $m(x, y, z) = (1 + z)(x^2 + y^2)^2$ .

**Ü 3.7.**

Skizzieren Sie den Querschnitt des Rotationskörpers  $K$  mit den Kugelkoordinaten  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $\delta \in [-\pi/6, \pi/6]$ .

Berechnen Sie die Masse des Körpers für die Massenbelegung  $m(r) = 1 - r$ .

**Ü 4.1.**

Bestimmen Sie die Skalenniveaus für:

- a) Mehrwertsteuersatz
- b) Anzahl Fraktionssitze einer Partei
- c) Alter eines Menschen
- d) Studiengang an der FH
- e) Ordnungszahl eines chemischen Elements
- f) Temperatur in °C
- g) Schulnote

**Ü 4.2.**

Messwerte (Rohdaten, verhältnisskaliert):

$x_i$	$H(x_i)$
9,7	1
9,9	2
10,2	5
10,4	2
10,5	4
11,0	2
11,3	1
11,5	1

Berechnen Sie  $n$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $F$ , Median, arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel, Standardabweichung.

Welche der berechneten Mittelwerte lassen sich auf Geschwindigkeiten anwenden ?

**Ü 4.3.**

x	0	1,2	2	2,4		6
y	12	9	4,4	6,4	2	0

Berechnen Sie für die 5 Messwertpaare  $(x,y)$  die Korrelationskoeffizienten  $r$  und  $R$  sowie die Gleichungen beider Regressionsgeraden. Ergänzen Sie den fehlenden  $x$ -Wert mit Hilfe der Regression.

**Ü 4.4.**

Wieviele vierstellige Hexadezimalzahlen gibt es? Wieviele davon bestehen aus vier verschiedenen Ziffern ?

**Ü 4.5.**

Ein Betrieb beschäftigt 4 Arbeiter an 4 Maschinen. Über längere Zeit ist die Zuordnung der Arbeiter zu den Maschinen unverändert geblieben. Nun beschließt die Betriebsleitung, alle Arbeiter mit allen Maschinen vertraut zu machen. Dies wird umgesetzt, indem wöchentlich die Zuordnung geändert wird. Wie lange dauert es, bis alle möglichen Zuordnungen der Arbeiter zu den Maschinen durchlaufen sind ? Was ändert sich, wenn es nur zwei verschiedene Maschinentypen A und B (je zwei Stück) gibt ? - Behandeln Sie die gleiche Problemstellung, wenn bei jedem Wechsel kein Arbeiter an seiner „angestammten“ Maschine arbeiten soll.

**Ü 4.6.**

a ) Wie groß ist die W'keit, dass beim sechsmaligen Würfeln jede Zahl genau einmal erscheint ?

b) Es wird mit einem fairen Würfel solange gewürfelt, bis zum ersten Mal "6" erscheint. Wie groß ist die W'keit, dass

- genau  $m$  Würfe benötigt werden ?
- mehr als  $m$  Würfe benötigt werden ?

#### Ü 4.7.

Bei einem Gerät zur optischen Mustererkennung wurde festgestellt :

Teil	Anteil an der Produktion	Fehlerquote bei der Erkennung
X	40 %	1.6 %
Y	45 %	0.2 %
Z	15 %	1.0 %

Berechnen Sie die Gesamtw'keit für eine richtige Erkennung.

#### Ü 4.8.

Bei einer Maschine in der Produktion wurde eine Ausschussquote von 9 % festgestellt. Ein Prüfgerät erkennt ein fehlerfreies Stück mit einer W'keit von 93 % und ein fehlerhaftes mit einer W'keit von 90 %. Wie groß ist die W'keit, dass ein Stück fehlerfrei ist, wenn das Prüfgerät keinen Fehler meldet ?

#### Ü 4.9.

Bei der Produktion eines bestimmten Bauteils sei die Ausschussquote 2,6 % . Es werden täglich zufällige Stichproben des Umfangs  $n = 100$  genommen.

Warnstufe 1 : Die Stichprobe enthält mehr als 5 Ausschusstücke.

Warnstufe 2 : Die Stichprobe enthält mehr als 7 Ausschusstücke.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- ist eine Stichprobe frei von Ausschusstücken ?
- treten die Warnstufen 1 bzw. 2 ein ?
- tritt die Warnstufe 2 ein, falls Warnstufe 1 vorliegt ?

#### Ü 4.10.

Ein Betrieb arbeitet in zwei Schichten pro Tag und ermittelt, dass pro Schicht (8 h) im Schnitt 2,9 Maschinenstillstände auftreten. Der „Alarmfall“ tritt ein, wenn binnen einer Stunde 2 oder mehr Stillstände auftreten.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- tritt der Alarmfall in der ersten Stunde der ersten Schicht ein ?
- treten in einer nicht-stillstandslosen Schicht überdurchschnittlich viele Stillstände auf ?
- tritt der erste Stillstand innerhalb der ersten 2 Stunden der ersten Schicht ein ?

#### Ü 4.11.

Die Lebensdauer einer Glühbirne ist näherungsweise  $N(6000, 200)$ -erteilt (Einheit: h).

- a) Mit welcher W'keit fällt die Birne vor Ablauf von 5750 h aus ?
- b) In welchem Bereich liegen die mittleren 80% der Verteilung ?

#### Ü 4.12.

Ein Werkstück wird 36-mal vermessen mit den folgenden Ergebnissen :

$x_i$	9,4	9,5	9,6	9,7	10,0
$H(x_i)$	1	6	16	12	1

- a) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für den wahren Wert mit Irrtumsw'keit  $\alpha = 0.05$  .

- b) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für die prozentuale Häufigkeit des Messwerts 9,5 mit Irrtumsw'keit  $\alpha = 0.1$  .

### Ü 4.13.

Ein Unternehmen führt bei einem Teil der Belegschaft eine neue Management-Methode ein. Der Erfolg dieser Methode soll mit Hilfe der halbjährlich vergebenen persönlichen Leistungspunkte (vierstufig von 0 bis 3 ) geprüft werden.

Führen Sie zwei Gauß-Tests durch, um festzustellen, ob es einen Unterschied zwischen alter und neuer Methode gibt. Gehen Sie zunächst von unabhängigen, dann von abhängigen Stichproben aus.

alte Meth.	neue Meth.
0	2
0	2
2	2
3	2
2	1
2	2
2	0
1	3
2	0
0	3
2	2
0	2
3	3
2	3
3	1
3	3
3	1
3	2
1	3
1	3
3	3
0	3

2	0
0	3
2	2
2	3
1	2
2	3
1	2
1	2
2	2

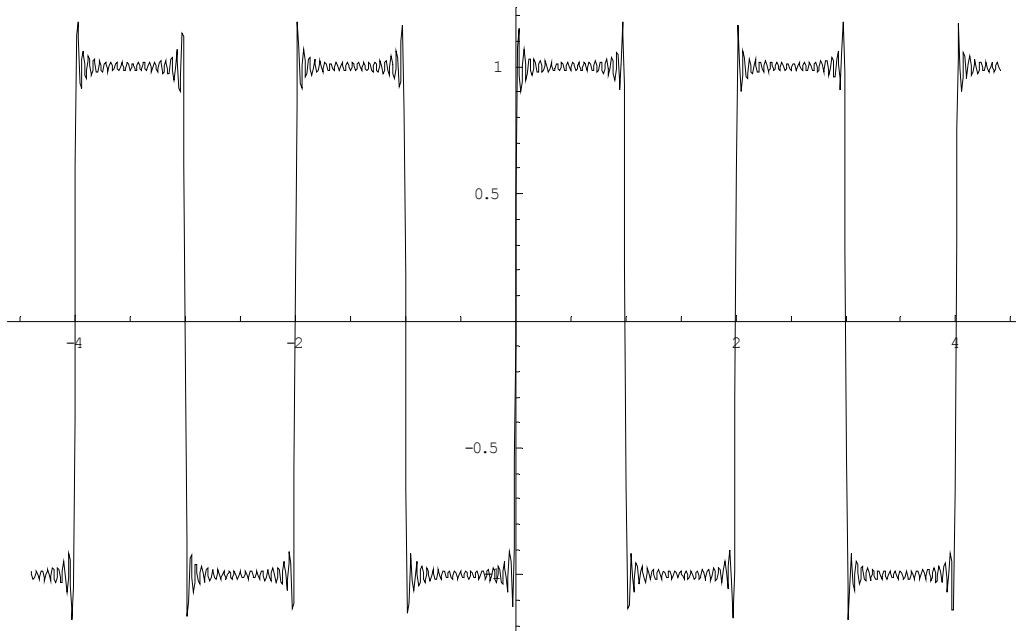
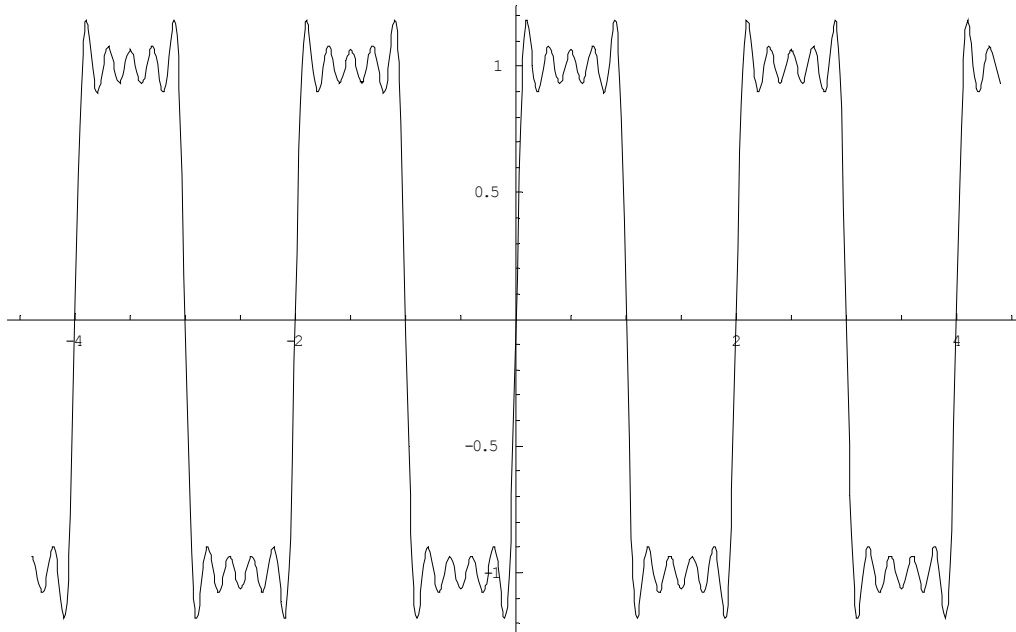
## Materialien

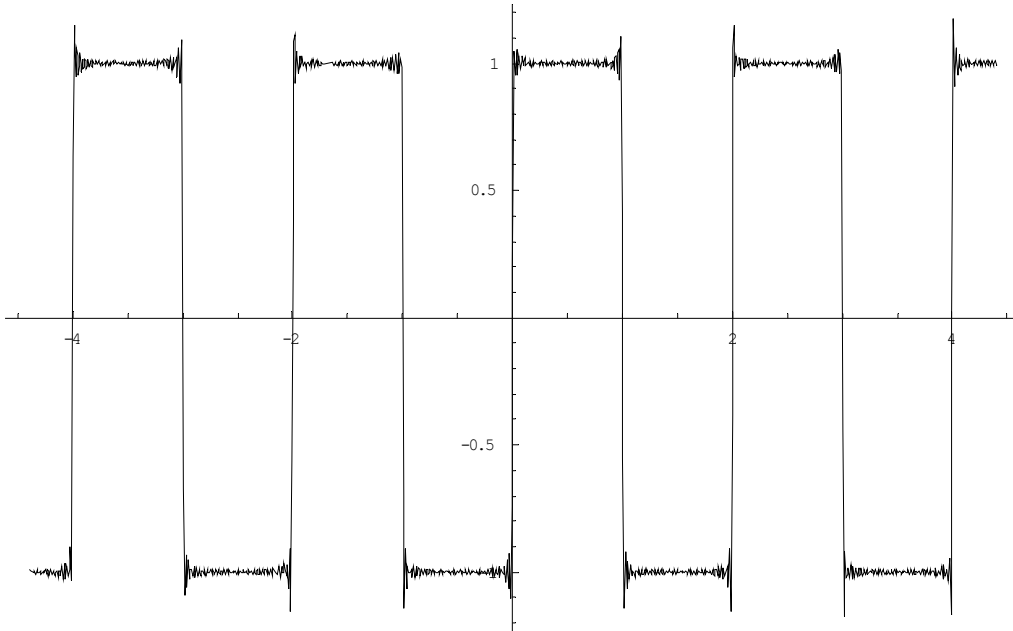
### Zu Ü 1.1.

x	cosh x	Polynom	rel. Fehler
0	1	1	0
0,1	1,0050	1,0050	0,0000
0,2	1,0201	1,0201	0,0000
0,3	1,0453	1,0453	0,0000
0,4	1,0811	1,0811	0,0000
0,5	1,1276	1,1276	0,0000
0,6	1,1855	1,1854	0,0001
0,7	1,2552	1,2550	0,0001
0,8	1,3374	1,3371	0,0003
0,9	1,4331	1,4323	0,0005
1	1,5431	1,5417	0,0009
1,1	1,6685	1,6660	0,0015
1,2	1,8107	1,8064	0,0024
1,3	1,9709	1,9640	0,0035
1,4	2,1509	2,1401	0,0050
1,5	2,3524	2,3359	0,0070
1,6	2,5775	2,5531	0,0095
1,7	2,8283	2,7930	0,0125
1,8	3,1075	3,0574	0,0161
1,9	3,4177	3,3480	0,0204
2	3,7622	3,6667	0,0254
2,1	4,1443	4,0153	0,0311
2,2	4,5679	4,3961	0,0376
2,3	5,0372	4,8110	0,0449
2,4	5,5569	5,2624	0,0530
2,5	6,1323	5,7526	0,0619
2,6	6,7690	6,2841	0,0716
2,7	7,4735	6,8593	0,0822
2,8	8,2527	7,4811	0,0935
2,9	9,1146	8,1520	0,1056
3	10,0677	8,8750	0,1185

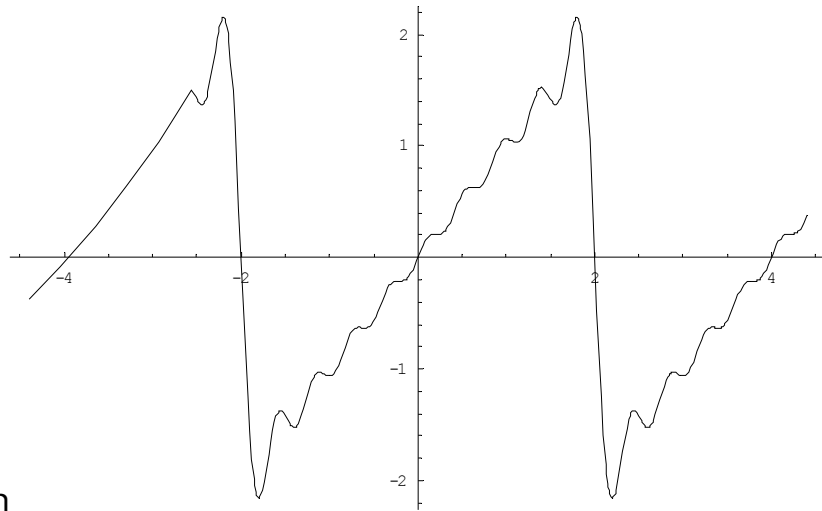
**Zu Ü 1.2.**

k zählt nur die ungeraden Summanden. Wenn wir davon 5, 20, 40 nehmen und dann abbrechen, erhalten wir die folgenden Bilder :

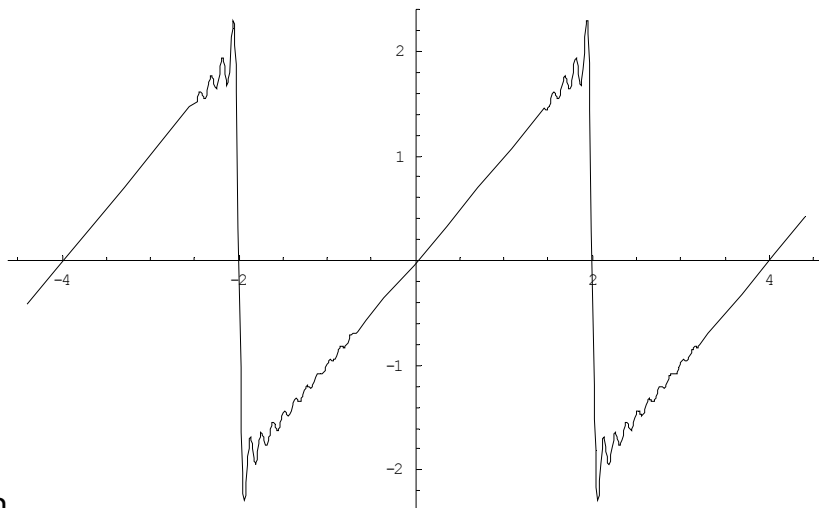




Zu Ü 1.3.



9 Summanden



32 Summanden

### Quantile der Standardnormalverteilung

$\alpha$	10 % 0.1	5 % 0.05	2 % 0.02	1 % 0.01	0.5 % 0.005	0.2 % 0.002	0.1 % 0.001
$z_\alpha$	1.282	1.645	2.054	2.326	2.576	2.878	3.090
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

$$F_{0,1}(-z_\alpha) = 1 - F_{0,1}(z_\alpha) = \alpha \qquad F_{0,1}(-z_{\alpha/2}) = 1 - F_{0,1}(z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

( $F_{0,1}$  Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung)

EXCEL:  $-z_\alpha = \text{NORMINV}(\alpha; 0; 1)$



